

峨眉二中高 2023 届高三下 5 月考

数 学 试 题 (理)

出题人：徐梦 审题人：叶志刚

注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷（客观题）和第 II 卷（主观题）两部分，合计 150 分。考试结束后本试卷由学生自行保管，答题卡必须按规定上交。

2. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、班级、考号填写清楚，并将考号填涂到对应方框内，请仔细核对。选择题答案进行填涂时请用 2B 铅笔把答题卡上对应的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其他答案，答在试卷试题卷上无效。

3. 主观题作答时，不能超过对应的答题边框，超出指定区域的答案无效。

一、选择题：（共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。每小题只有一个选项是正确的）

1. 命题 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \geq 0$ 的否定是()

A. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + x_0 \leq 0$ B. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + x_0 < 0$

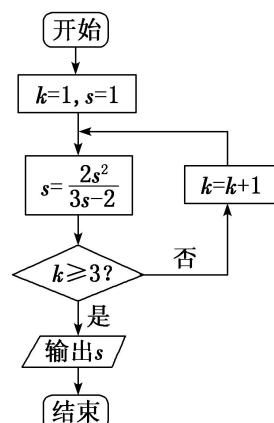
C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \leq 0$ D. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x < 0$

2. 若复数 z 满足 $z(1-i) = 1+3i$ ，则 $z =$ ()

A. $-1+2i$ B. $1+2i$ C. $-1-2i$ D. $1-2i$

3. 执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1



4. 函数 $f(x) = x \ln x$ ，则()

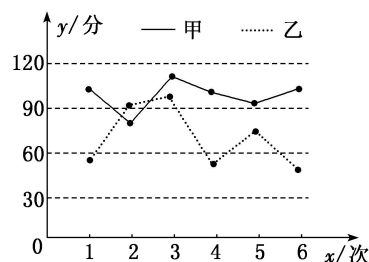
A. 在 $(0, +\infty)$ 上递增 B. 在 $(0, +\infty)$ 上递减 C. 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上递减 D. 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上递增

5. 甲乙两名同学在高三的 6 次测试的成绩统计如图，甲乙两组数据的

的平均数分别为 $\bar{x}_甲, \bar{x}_乙$ ，标准差分别为 $\sigma_甲, \sigma_乙$ ，则()

A. $\bar{x}_甲 < \bar{x}_乙, \sigma_甲 < \sigma_乙$ B. $\bar{x}_甲 > \bar{x}_乙, \sigma_甲 > \sigma_乙$

C. $\bar{x}_甲 < \bar{x}_乙, \sigma_甲 > \sigma_乙$ D. $\bar{x}_甲 > \bar{x}_乙, \sigma_甲 < \sigma_乙$



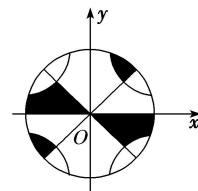
6. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且满足 $f(x) = 2xf'(1) + \ln x$ ，则 $f'(1) =$ ()

A. $-e$ B. -1 C. 1 D. e

7. 已知命题 p : 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 总有 $2^x > 0$; q : “ $x > 1$ ”是“ $x > 2$ ”的充分不必要条件, 则下列命题为真命题的是()

- A. $p \wedge q$ B. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ C. $(\neg p) \wedge q$ D. $p \wedge (\neg q)$

8. 如图所示, 黑色部分和白色部分图形是由曲线 $y = \frac{1}{x}$, $y = -\frac{1}{x}$, $y = x$, $y = -x$ 及圆构成的. 在圆内随机取一点, 则此点取自黑色部分的概率是()



- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{8}$

9. 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}$ 在区间 $(a, a+5)$ 上存在最小值, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(-5, 0)$ B. $[-5, 0)$ C. $(-3, 0)$ D. $[-3, 0)$

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + b^2x + 1$, 若 a 是从 1, 2, 3 三个数中任取的一个数, b 是从 0, 1, 2 三个数中任取的一个数, 则该函数有两个极值点的概率为()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{5}{9}$ D. $\frac{7}{9}$

11. 已知函数 $f(x) = e^x - x^2$, 若 $\forall x \in [1, 2]$, 不等式 $-m \leq f(x) \leq m^2 - 4$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是()

- A. $(-\infty, 1-e]$ B. $[1-e, e]$ C. $[e, +\infty)$ D. $[-e, e+1]$

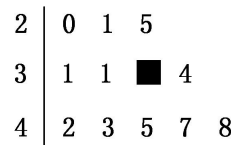
12. 已知函数 $y = f(x)$ 对任意的 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 满足 $f'(x)\cos x + f(x)\sin x > 0$ (其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数), 则下列不等式成立的是()

- A. $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3}) < f(\frac{\pi}{4})$ B. $\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{3}) < f(-\frac{\pi}{4})$ C. $f(0) > 2f(\frac{\pi}{3})$ D. $f(0) > \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$

二、填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。)

13. 从 300 名学生(其中男生 180 人, 女生 120 人)中按性别用分层抽样的方法抽取 50 人参加比赛, 则应该抽取男生人数为_____人。

14. 在如图所示一组数据的茎叶图中, 有一个数字被污染后模糊不清, 但曾计算得该组数据的极差与中位数之和为 61, 则被污染的数字为_____。



15. 已知曲线 $y = x + \ln x$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与曲线 $y = ax^2 + (a+2)x + 1$ 相切, 则 $a =$ _____。

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 且 $f'(x) + f(x) = 2xe^{-x}$, 若 $f(0) = 1$, 则函数 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 的取值范

围为_____

三、简答题：（本题共 6 个大题，17 题 10 分，其余每题 12 分共 70 分，请写出详细的解题过程。）

17.（10 分）已知命题 $p: (x+1)(x-3)<0$ ，命题 $q: 2m<x<1-m$ ．

(1)当 $m=-1$ 时， $p \vee q$ 为真命题，求 x 的取值范围；

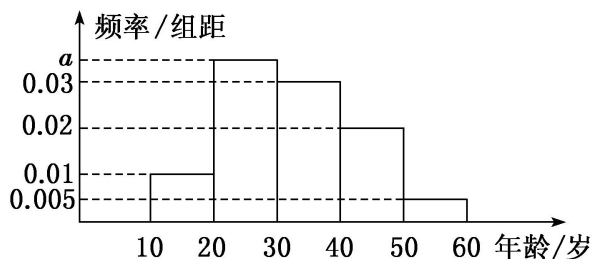
(2)若 q 是 p 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围。

18.（12 分）某网站从春节期间参与收发网络红包的手机用户中随机抽取 10 000 名进行调查，将受访用户按年龄分成 5 组： $[10,20)$ ， $[20,30)$ ， \dots ， $[50,60]$ ，并整理得到如图频率分布直方图．

(1)求 a 的值；

(2)从春节期间参与收发网络红包的手机用户中随机抽取一人，估计其年龄低于 40 岁的概率；

(3)估计春节期间参与收发网络红包的手机用户的平均年龄．



19.（12 分）已知函数 $f(x) = \ln x - ax$ ．

(1)若 $a=1$ 时，求曲线 $f(x)$ 在点 $x=e$ 处的切线方程；

(2)若函数 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围．

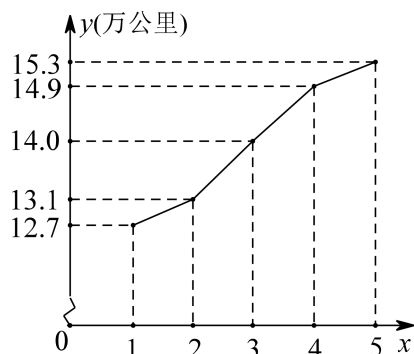
20. (12 分) 铁路作为交通运输的重要组成部分, 是国民经济的大动脉, 在我国经济发展中发挥着重要的作用. 截止 2021 年, 中国铁路营业里程达到 15.3 万公里. 下图是我国 2017~2021 年铁路营业里程折线图, 其中 x 表示年份数与 2016 的差, y (单位: 万公里) 表示各年的营业里程数.

(1) 由折线图易知 y 与 x 具有较强的线性关系, 试用最小二乘法求 y 关于 x 的回归直线方程, 并预测 2022 年营业里程为多少万公里?

(2) 从 2017~2021 年的五个营业里程数中随机抽取两个数, 求所取得的两个数中, 至少有一个超过 14 的概率.

附: 回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

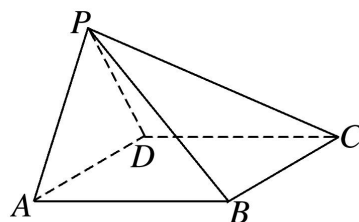
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$



21. (12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $PA = PD$.

(1) 证明: $BC \perp PB$;

(2) 若 $PA \perp PD$, $PB = AB$, 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.



22. (12 分) 设函数 $f(x) = \ln(x+a) + x^2$

(1) 若当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极值, 求 a 的值, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在极值, 求 a 的取值范围, 并证明所有极值之和大于 $\ln \frac{e}{2}$.